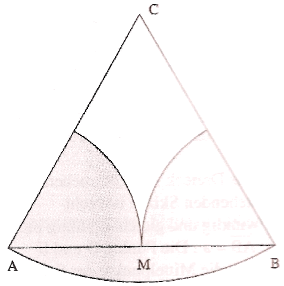
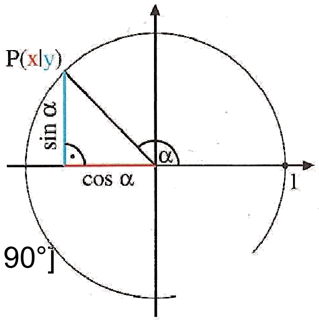
Grundwissen 10. Klasse G8

Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele	Lösungen
I) Kreis und Kugel Die Kreiszahl π ist eine irrationale Zahl, also ein unendlicher, nicht periodischer Dezimalbruch. **Berechnungen an Kreissektoren:** Radius r, Mittelpunktswinkel φ, Fläche A, Bogenlänge b $A_S = \frac{\varphi}{360°} r^2 \pi$; $b_S = \frac{\varphi}{360°} 2r\pi$; $A_S = \frac{1}{2} br$ **Bogenmaß:** Die Größe eines Winkels kann im Gradmaß (φ) oder im Bogenmaß (x) angegeben werden: $x = \frac{\varphi}{360°} \cdot 2\pi$; $\varphi = \frac{x}{2\pi} \cdot 360°$ $\varphi \in [0° ; 360°]$; $x \in [0 ; 2\pi]$; $180° \mathrel{\widehat{=}} \pi$; $360° \mathrel{\widehat{=}} 2\pi$	1. Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit Seitenlänge a. M ist der Mittelpunkt von [AB]. Berechne Inhalt und Umfang der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a !  	1. $A_{\text{grau}} = A_{\text{Sektor grpß}} - A_{\Delta\text{ gleichseitig}} + 2 \cdot A_{\text{Sektor klein}} =$ $= \frac{60°}{360°} a^2\pi - \frac{1}{4} a^2\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{60°}{360°} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi =$ $= \frac{1}{6} a^2\pi - \frac{1}{4} a^2\sqrt{3} + \frac{1}{12} a^2\pi =$ $= \frac{1}{4} a^2\pi - \frac{1}{4} a^2\sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \left(\pi - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}35a^2$ $u_{\text{grau}} = b_{\text{groß}} + 2 \cdot b_{\text{klein}} =$ $= \frac{60°}{360°} 2a\pi + 2 \cdot \frac{60°}{360°} 2\left(\frac{a}{2}\right)\pi =$ $= \frac{1}{3} a\pi + \frac{1}{3} a\pi = \frac{2}{3} a\pi \approx 2{,}09\ a$
	2. Rechne jeweils in das andere Maß um ! a) 15° b) $\frac{7\pi}{10}$ c) 4,5	2. a) $x = \frac{15°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{1}{12}\pi$ b) $\varphi = \frac{7\pi}{10 \cdot 2\pi} \cdot 360° = 126°$ c) $\varphi = \frac{4{,}5}{2\pi} \cdot 360° \approx 257{,}8°$
Berechnungen an der Kugel: Radius r, Volumen V, Oberfläche O $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$; $O = 4r^2\pi$	3. a) Wie viel Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes bleiben leer, wenn man eine Kugel in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Körper verpackt ? b) Vergleiche die Kugeloberfläche mit der Mantelfläche des Zylinders !	3. a) $V_{\text{Rest}} = V_Z - V_K = r^2\pi \cdot 2r - \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{2}{3} r^3\pi$ $\text{Anteil}_{\text{Rest}} = \frac{V_{\text{Rest}}}{V_Z} = \frac{\frac{2}{3} r^3\pi}{2r^3\pi} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\,\%$ b) $O_K = 4r^2\pi$ $M_Z = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi = O_K$

II) Trigonometrie

Sinus, Kosinus am Einheitskreis



Für einen beliebigen Punkt P(x|y) auf dem Einheitskreis gilt:

$x = \cos \alpha$; $y = \sin \alpha$

Aus Symmetriegründen gilt: mit $\alpha \in [0°; 90°]$

Die Sinus- und Kosinuswerte der Winkel α, $180°- \alpha$, $180°+ \alpha$ und $360°- \alpha$ haben denselben Betrag; zum Vorzeichen: vgl. Einheitskreis

Trigonometrische Funktionen auf $\mathbb{R}$

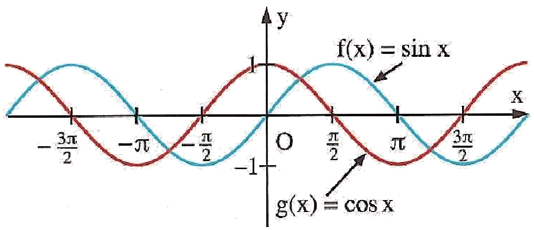
Für den Winkel x im Bogenmaß sind die trigon. Funktionen

f: $x \mapsto \sin x$ Sinusfunktion
f: $x \mapsto \cos x$ Kosinusfunktion

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ihre Wertemengen sind $W = [-1 ; 1]$.

Sie sind periodisch mit der Periode 2π, d.h.:

$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$; $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$



allgemeine Sinusfunktion $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b > 0$

$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d = a \cdot \sin[b(x + \frac{c}{b})] + d$

- Amplitude: $|a|$
- Periode: $\frac{2\pi}{b}$
- Verschiebung: um $\frac{c}{b}$ nach rechts ($c < 0$) bzw. links ($c > 0$)
- Verschiebung: um d nach oben ($d > 0$) bzw. unten ($d < 0$)

1. Bestimme exakt !
   a) sin 150°
   b) cos 225°

2. Für welche Winkel zwischen 0° und 360° gilt:
   a) $\sin \alpha = -0{,}9580$
   b) $\cos \alpha = -0{,}9909$?

3. Bestimme exakt alle x mit $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, für die gilt:
   a) $\sin x = 1$
   b) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4. $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$

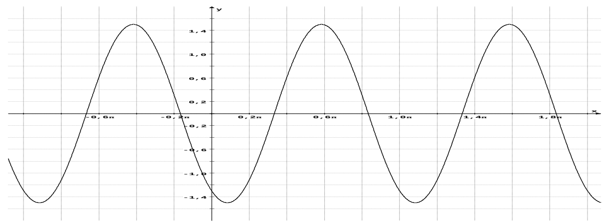
   Bestimme Amplitude, Periode, Verschiebung und Nullstellen der Funktion f für $x \in [-\pi ; 2\pi]$ und zeichne G_f !

1. a) $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$
   b) $\cos 225° = -\cos 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

2. a) $\sin \alpha = -0{,}9580 \Rightarrow \alpha \in$ Quadrant III; IV
   $\varphi = \sin^{-1}(0{,}9580) \approx 73{,}3°$
   $\Rightarrow \alpha_1 = 180° + \varphi = 253{,}3°$
   $\alpha_2 = 360° - \varphi = 286{,}7°$
   b) $\cos \alpha = -0{,}9909 \Rightarrow \alpha \in$ Quadrant II; III
   $\varphi = \cos^{-1}(0{,}9909) \approx 7{,}7°$
   $\Rightarrow \alpha_1 = 180° - \varphi = 172{,}3°$
   $\alpha_2 = 180° + \varphi = 187{,}7°$

3. a) $\sin y = 1$ für $y \in \{-270° ; 90°\}$ also
   $\sin x = 1$ für $x \in \{-\frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\}$
   b) $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ für
   $y \in \{-210° ; -150° ; 150°; 210°\}$ also
   $x \in \{-\frac{7\pi}{6} ; -\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\}$

4. $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{2}\sin\left[2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right]$
   - Amplitude: $\frac{3}{2}$
   - Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ (*)
   - Verschiebung: $\frac{1}{3}\pi$ nach rechts (**)
   - Nullst.: wegen (*) und (**) gilt $f(x) = 0$ für
   $x \in \left\{-\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{4\pi}{3} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$



LEIBNIZ GYMNASIUM ALTDORF

III) Exponentialfunktion und Logarithmus

Lineares Wachstum: $f(t) = f(0) + d \cdot t$

Konstanter absoluter Zuwachs in gleichen Zeitschritten;
d bezeichnet die absolute Änderung pro Zeitschritt.

Exponentielles Wachstum: $f(t) = f(0) \cdot a^t$

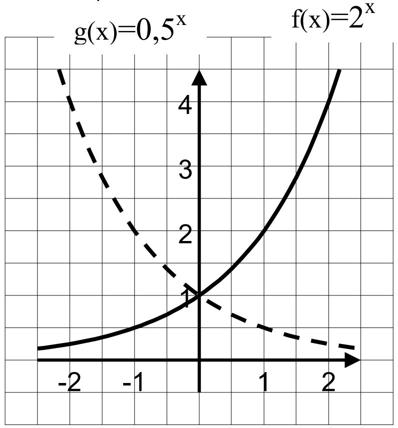
Konstanter Wachstumsfaktor a in gleichen Zeitschritten;
$a - 1$ bezeichnet die relative/prozentuale Änderung pro Zeitschritt.

Halbwertszeit: Zeit, in der sich Fkt.wert jeweils halbiert
Verdopplungszeit: Zeit, in der sich Fkt.wert jeweils verdoppelt

Exponentialfunktionen

Funktionen der Form $\mathbf{f(x) = b \cdot a^x}$ $a > 0, a \neq 1$

- $b = f(0)$: Anfangswert/-bestand
- $a > 1$: G_f str. mon. steigend
- $0 < a < 1$: G_f str. mon. fallend
- $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $b > 0$
- $P(0 \mid b) \in G_f$
- Asymptote von G_f: x-Achse
- Graph von $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ erhält man aus Graph von $f(x) = a^x$ d. Spiegelung an der y-Achse



Logarithmen

Die eindeutige Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$ nennt man Logarithmus von b zur Basis a: $\mathbf{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$

$g(x) = \log_a x$ ist Umkehrfkt. von $f(x) = a^x$

Rechenregeln: u, v, a > 0; a ≠ 1

(1) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

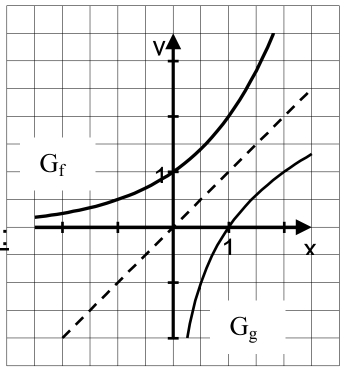
(2) $\log_a (u : v) = \log_a u - \log_a v$

(3) $\log_a u^x = x \cdot \log_a u$

(4) $\log_a b = \lg b : \lg a$ (lg: Zehnerlog.)

Lösungsstrat. Exponentialgleichungen:

- Vergleich der Exponenten bei gleicher Basis
- beidseitiges Logarithmieren



1. Ein Sparer legt 1000 € bei zwei unterschiedlichen Banken für jeweils 10 Jahre an:

   a) Zinssatz i = 5 %; Zinsen werden im Folgejahr mitverzinst („Zinseszins");

   b) Zinssatz i = 5 %; Zinsen werden am Jahresende ausbezahlt.

   Vergleiche den Kontostand zu Laufzeitende !

2. Bestimme a und b so, dass der Graph der Exponentialfkt. $f(x) = b \cdot a^x$ durch die Punkte P (3 | 5) und Q (5 | 0,2) geht !

3. Löse ohne Taschenrechner !

   $\log_2 (5x) = 1 + \log_2 6$

4. Löse folgende Exponentialgleichungen !

   a) $6^{4x-9} = 36^{1,5}$

   b) $5^{2x+1} = 17$

   c) $5^{2x} = 125 + 20 \cdot 5^x$

5. a) Unter normalen Bedingungen vermehren sich Cholera-Bakterien so stark, dass ihre Anzahl stündlich um das siebenfache steigt. Berechne die Verdopplungszeit !

   b) Anfangs waren es 100 Bakterien. Wann werden es unter normalen Bedingungen ungefähr 1 Milliarde Bakterien sein ?

1\. a) $k(x) = 1000 \cdot 1,05^x$
$k(10) = 1000 \cdot 1,05^{10} \approx 1628,89$
b) $k(x) = 1000 + 0,05 \cdot 1000 \cdot x$
$k(10) = 1000 + 0,05 \cdot 1000 \cdot 10 = 1500$

2\. $P \in G_f$ => I) $5 = b \cdot a^3$
$Q \in G_f$ => II) $0,2 = b \cdot a^5$

$\frac{II}{I} \Rightarrow \frac{0,2}{5} = \frac{ba^5}{ba^3} \Rightarrow \frac{1}{25} = a^2 \Rightarrow \frac{1}{5} = a$ da a > 0

a in I) $5 = b \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow b = 625$ $\mathbf{f(x) = 625 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x}$

3\. $\log_2 (5x) = 1 + \log_2 6$
$\log_2 (5x) = \log_2 2 + \log_2 6$
$\log_2 (5x) = \log_2 (2 \cdot 6)$
$5x = 12$ da: $\log_2$ streng monoton
$x = 2,4$

4\. a) $6^{4x-9} = 6^{2 \cdot 1,5}$
$4x - 9 = 3$ da: 6^x streng monoton
$x = 3$

b) $\lg (5^{2x+1}) = \lg 17$
$(2x + 1) \cdot \lg 5 = \lg 17$
$2x + 1 = \lg 17 : \lg 5$
$x = \left(\frac{\lg 17}{\lg 5} - 1\right) : 2 - 1 \approx 0,38$

c) $5^{2x} = 125 + 20 \cdot 5^x$ **Substitution: $5^x = v$**
$v^2 - 20v - 125 = 0$

$$v_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125)}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 30}{2}$$

$v_1 = (-5)$ => $5^x = (-5)$ *Widerspruch*: $5^x > 0$
$v_2 = 25$ => $5^x = 25$ => **x = 2**

5\. a) $f(x) = b \cdot 8^x$
$2b = b \cdot 8^x$; $2 = 8^x$; $x = \log_8 2 = 1/3$
Verdopplungszeit: 20 Minuten.

b) $10^9 = 10^2 \cdot 8^x$
$10^7 = 8^x$
$x = \log_8 10^7 = \lg 10^7 : \lg 8 = 7 : \lg 8 \approx 7,75$
Dauer: ca. 7 Stunden 45 Minuten

IV) Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit:

Vierfeldertafel:

Zwei Ereignisse A und B ermöglichen die Zerlegung der Ergebnismenge Ω eines Zufallsexperiments in vier Teilmengen, so dass jedes Ergebnis $\omega \in \Omega$ genau einer davon angehört:

	B	$\overline{\mathbf{B}}$
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$
$\overline{\mathbf{A}}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Man kann in die Vierfeldertafel auch die Wahrscheinlichkeiten der genannten Ereignisse eintragen:

	B	$\overline{\mathbf{B}}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	**P (A)**
$\overline{\mathbf{A}}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\mathbf{P(\overline{A})}$
	P (B)	$\mathbf{P(\overline{B})}$	

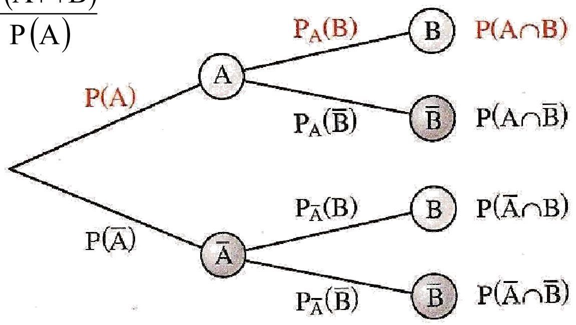
Aus jeder Vierfeldertafel lassen sich zwei Baumdiagramme ableiten: 1. Stufe A und $\overline{A}$, 2. Stufe B und $\overline{B}$ oder umgekehrt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

Sind A und B zwei Ereignisse mit $P(A) \neq 0$, so bezeichnet man die Wsk. des Eintretens von B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist, als **bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$**.

Es gilt: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Wählt man A und $\overline{A}$ als 1. Stufe, so ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



1. Auf dem Flughafen von Mallorca wurden deutsche Urlauber nach ihren Fremdsprachenkenntnissen befragt:

   70 Urlauber gaben an, Spanisch sprechen zu können, 60 Reisende sprechen kein Englisch. 50 der befragten Personen gaben an, keine der beiden Fremdsprachen zu beherrschen, das waren 25 % aller befragten Personen.

   a) Stelle mit Hilfe des Textes eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten auf !

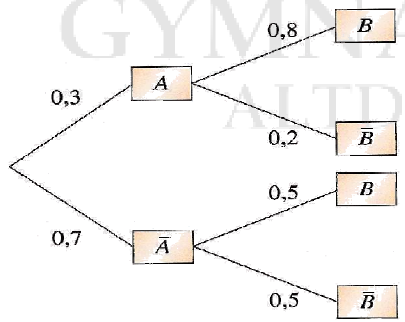
   b) Zeichne das zugehörige Baumdiagramm mit dem 1. Merkmal „Englischkenntnisse" und beschrifte die Äste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten !

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein befragter Urlauber Englisch und Spanisch beherrscht ?

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein befragter Urlauber auch Spanisch spricht, wenn er Englisch beherrscht ?

   e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine befragte Person auch Englisch spricht, wenn sie Spanisch beherrscht ?

2. Gegeben ist folgendes Baumdiagramm:

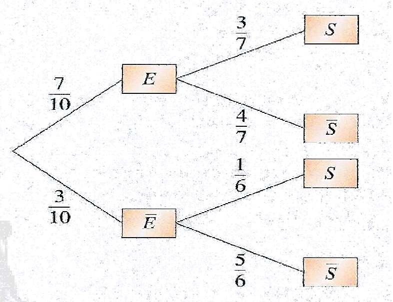


Stelle die zugehörige Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten auf !

1. a) $50 \mathrel{\hat{=}} 25\,\%$ von $|\Omega|$ => $|\Omega| = 200$

	S	$\overline{\mathbf{S}}$	
E	60	80	**140**
$\overline{\mathbf{E}}$	10	**50**	**60**
	70	**130**	**200**

b)



c) $P(E \cap S) = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{10} = 30\,\%$ Baum

$P(E \cap S) = \dfrac{60}{200} = \dfrac{3}{10} = 30\,\%$ Tafel

d) $P_E(S) = \dfrac{3}{7}$ Baum

$P_E(S) = \dfrac{P(E \cap S)}{P(E)} = \dfrac{|E \cap S|}{|E|} = \dfrac{60}{140} = \dfrac{3}{7}$ Tafel

e) $P_S(E) = \dfrac{P(E \cap S)}{P(S)} = \dfrac{|E \cap S|}{|S|} = \dfrac{60}{70} = \dfrac{6}{7}$ Tafel

2.

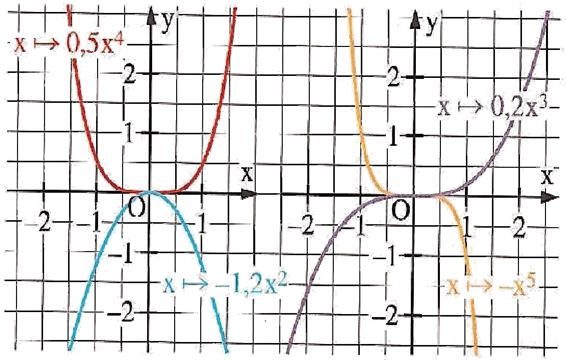
	B	$\overline{\mathbf{B}}$	
A	0,24	0,06	**0,3**
$\overline{\mathbf{A}}$	0,35	0,35	**0,7**
	0,59	0,41	**1**

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$

V) Ganzrationale Funktionen:

allgemeine Potenzfunktion vom Grad n: $f(x) = a \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$



n gerade:

$a > 0 \Rightarrow W_f = \mathbb{R}_0^+$

$a < 0 \Rightarrow W_f = \mathbb{R}_0^-$

G_f achsensymm.

n ungerade:

$W_f = \mathbb{R}$

G_f punktsymm.

Polynom vom Grad n: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$

Ganzrationale Funktion p (x) vom Grad n

Eine Funktion $p: x \mapsto p(x)$, deren Funktionsterm p (x) ein Polynom vom Grad n ist, heißt ganzrationale Fkt. vom Grad n.

Eigenschaften:

- Das Verhalten von p (x) für betragsmäßig große x – Werte wird durch den Summanden $a_n x^n$ bestimmt.
- Ist a eine Nullstelle von p(x), so lässt sich p(x) in der Form $p(x) = (x - a) \cdot g(x)$ schreiben mit einem Polynom g (x) vom Grad n – 1; (x – a) heißt **Linearfaktor**.
- g (x) erhält man durch **Polynomdivision**: $g(x) = p(x) : (x - a)$.
- Somit hat p (x) maximal n Nullstellen.
- x = a ist eine **k – fache Nullstelle**, wenn (x – a) in der vollst. faktorisierten Form von p(x) k–mal vorkommt.

k ungerade => Vorzeichenwechsel von p (x) bei x = a

k gerade => kein Vorzeichenw. von p (x) bei x = a

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^3 + 6x + 4$.
   a) Bestimme den Grad von f (x) !
   b) Bestimme die Koeffizienten von f (x) !
   c) Bestimme das Verhalten von f (x) für betragsmäßig große x – Werte !
   d) Bestimme die Nullstellen von f (x) !
   e) Skizziere den Verlauf von G_f !
   f) Bestimme die Intervalle auf der x – Achse, in denen G_f oberhalb der x – Achse verläuft !

2. Bestimme die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion vom Grad 5, die bei x = –4 eine dreifache und bei x = 2 eine zweifache Nullstelle hat und deren Graph durch den Punkt P (1 | 6,25) verläuft !

1. $f(x) = -2x^3 + 6x + 4$

   a) höchste Potenz: 3

   => Grad von f (x) = 3

   b) $a_3 = -2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 6$, $a_0 = 4$

   c) $f(x) = -2x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{4x^3}\right)$

   $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

   $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

   d) eine Nullstelle: $x_1 = 2$ (erraten: Teiler von a_0 !)

   $(-2x^3 + 6x + 4) : (x - 2) = -2x^2 - 4x - 2$
   $\underline{-(-2x^3 + 4x^2)}$
   $-4x^2 + 6x + 4$
   $\underline{-(-4x^2 + 8x)}$
   $-2x + 4$
   $\underline{-(-2x + 4)}$
   0

   einfache NS: Vorzeichenwechsel

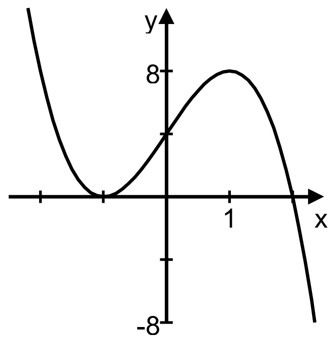
   weiterer Nullstellen:

   $-2x^2 - 4x - 2 = -2(x^2 + 2x + 1) = -2(x + 1)^2 = 0$

   => x = -1 : doppelte NS, kein Vorzeichenwechsel

   $\mathbf{f(x) = -2(x - 2)(x + 1)^2}$

   e) f (0) = 4



   f) $f(x) > 0$ für $x \in \,]-\infty; 2[\; \setminus \{-1\}$

2. $f(x) = a(x + 4)^3 (x - 2)^2$

   $6{,}25 = f(1) = a \cdot 5^3 \cdot (-1)^3 = a \cdot 125 \Rightarrow a = 0{,}05$

   $\mathbf{f(x) = 0{,}05(x + 4)^3 (x - 2)^2}$

LEIBNIZ GYMNASIUM ALTDORF

VI) Eigenschaften von Funktionen und ihrer Graphen:

Verschieben von Funktionsgraphen:

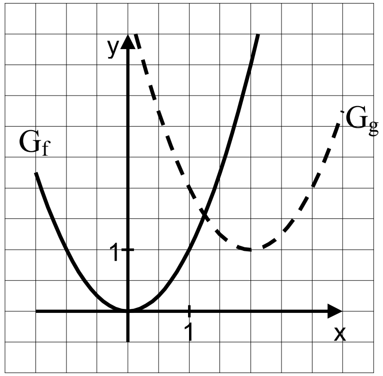
$g(x) = f(x + a) + b$ **=>** G_g entsteht aus G_f durch Verschiebung um $-a$ in x-Richtung und b in y-Richtung

$f(x) = x^2$

$g(x) = (x-2)^2 + 1$

a = (-2): rechts

b = 1: oben



Strecken von Funktionsgraphen:

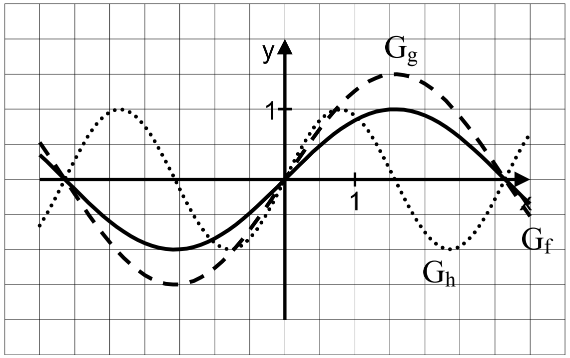
$g(x) = k \cdot f(x)$, $k > 0$ **=>** G_g ist im Vergleich zu G_f von der x-Achse aus in y-Richtung mit dem Streckfaktor k gestreckt

$h(x) = f(k \cdot x)$, $k > 0$ **=>** G_h ist im Vergleich zu G_f von der y-Achse aus in x-Richtung mit dem Streckfaktor $\frac{1}{k}$ gestreckt

$f(x) = \sin x$

$g(x) = 1{,}5 \cdot \sin x$

$h(x) = \sin(2x)$



1. Gegeben sind die Funktionen

   $f(x) = x^2 + 2x + 3$ und

   $g(x) = x^2 + 4x + 4$.

   Überprüfe rechnerisch, durch welche Verschiebung G_g aus G_f entsteht !

2. Zeichne in ein gemeinsames Koordinatensystem die Graphen der Funktionen

   $f(x) = x^2 - 2$

   $g(x) = 2 \cdot f(x)$

   $h(x) = f(2 \cdot x)$!

1. **Weg 1: allgemeiner Ansatz:**

   $g(x) = f(x+a) + b =$

   $= (x+a)^2 + 2(x+a) + 3 + b =$

   $= x^2 + 2ax + a^2 + 2x + 2a + 3 + b =$

   $= x^2 + x(2a + 2) + a^2 + 2a + 3 + b$

   Vergleich der Koeffizienten:

   I) $2a + 2 = 4$ => $a = 1$

   II) $a^2 + 2a + 3 + b = 4$

   $1 + 2 + 3 + b = 4$ => $b = (-2)$

   G_g ist im Vergleich zu G_f um 1 Einheit nach links und um 2 Einheiten nach unten verschoben.

   Weg 2: Scheitelform:

   $f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ => $S_f(-1 \mid 2)$

   $g(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ => $S_g(-2 \mid 0)$

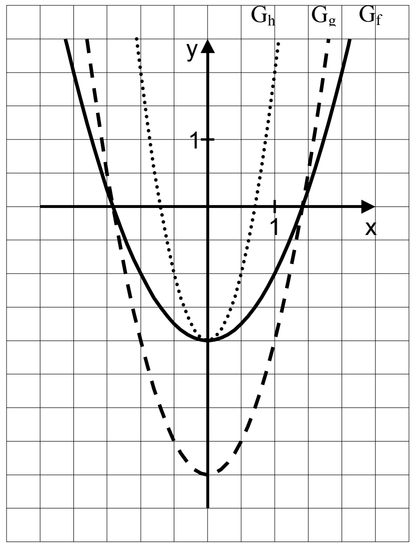
   S_g und damit G_g entsteht durch Verschiebung um 1 Einheit nach links und um 2 Einheiten nach unten;

   $g(x) = f(x+1) - 2$

2. $f(x) = x^2 - 2$

   $g(x) =$
   $= 2 \cdot f(x) =$
   $= 2(x^2 - 2) =$
   $= 2x^2 - 4$

   $h(x) =$
   $= f(2 \cdot x) =$
   $= (2x)^2 - 2 =$
   $= 4x^2 - 2$



LEIBNIZ GYMNASIUM ALTDORF

Spiegeln von Funktionsgraphen:

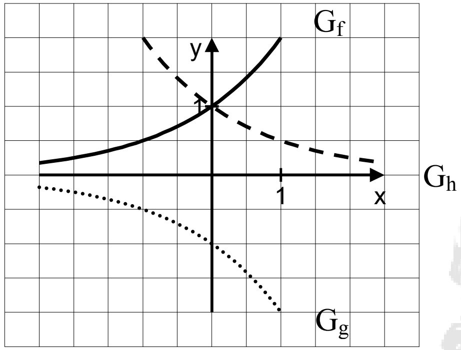
g (x) = – f (x) **=>** G_g entsteht aus G_f durch Spiegelung an der <u>x-Achse</u>

h (x) = f (–x) **=>** G_h entsteht aus G_f durch Spiegelung an der <u>y-Achse</u>

f (x) = 2^x

g (x) = – 2^x

h (x) = 2^{-x}



Symmetrie von Funktionsgraphen:

f (–x) = f (x) für alle x ∈ D **=>** G_f <u>achsen</u>symmetrisch bzgl. der y – Achse

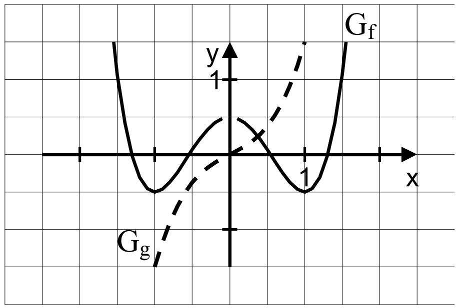
g (–x) = – g (x) für alle x ∈ D **=>** G_g <u>punkt</u>symmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs

Fkt. <u>ganzrational</u> **=>** $\mathbf{G_f}$ achsensymmetrisch
<=> alle vorkomm. Exponenten gerade

=> $\mathbf{G_g}$ punktsymmetrisch
<=> alle vorkomm. Exponenten ungerade

f (x) = $x^4 - 2x^2 + 0{,}5$

g (x) = $x^3 + 0{,}5x$



3. Gegeben ist die Funktion

f (x) = $\frac{1}{x-1}$.

Gib die Gleichungen der Funktionen g und h an, deren Graphen durch Spiegelung an der x – Achse (g) bzw. an der y – Achse (h) aus G_f hervorgehen.

Zeichne die drei Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem !

4. Überprüfe rechnerisch, ob die Graphen folgender Funktionen eine Symmetrieeigenschaft aufweisen und zeichne sie in ein gemeinsames Koordinatensystem !

f (x) = sin x

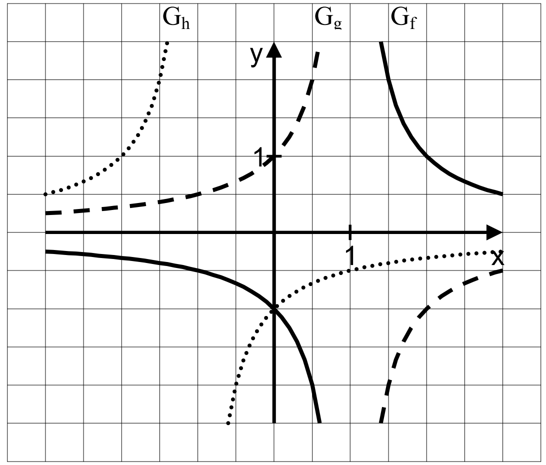
g (x) = $1{,}5^x$

LEIBNIZ GYMNASIUM ALTDORF

3. f (x) = $\frac{1}{x-1}$ sA: x = 1; wA: y = 0

g (x) = – f (x) = $-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$ sA: x = 1; wA: y = 0

h (x) = f (– x) = $\frac{1}{-x-1} = \frac{-1}{x+1}$ sA: x = –1; wA: y = 0



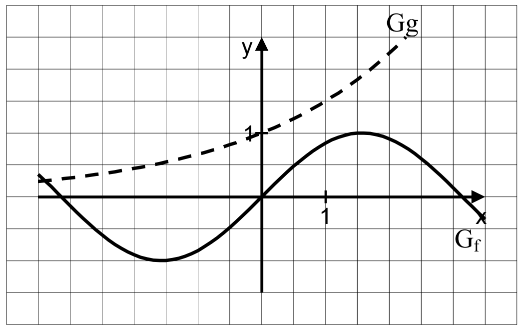
4. f (-x) = sin (-x) = – sin x = – f (x)

G_f ist punktsymmerisch zum Ursprung.

g (-x) = $1{,}5^{-x} = \left(\frac{1}{1{,}5}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

g (-x) ≠ g (x) und g (-x) ≠ –g (x)

Gg weist keine Symmetrieeigenschaft auf.



Grenzwerte im Unendlichen:

Die Funktionswerte f (x) kommen für beliebig groß werdende x-Werte einer Zahl a beliebig nahe => $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

a heißt Grenzwert der Funktion f für x gegen plus unendlich;

y = a ist dann waagrechte Asymptote von G_f;

Eine Funktion, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**.

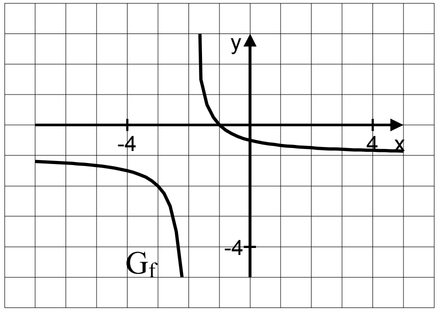
Schwanken die Funktionswerte, besitzt die Funktion f also keinen Grenzwert, so heißt sie **divergent**.

$f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = (-1)$

senkr. Asy.: x = (-2)

waag. Asy.: y = (-1)



Funktionstypen:

- lineare Funktion ≙ ganzrat. Fkt. ersten Grades
- quadratische Funktion ≙ ganzrat. Fkt. zweiten Grades
- ganzrationale Fkt. höhren Grades
- gebrochen rationale Fkt.
- trigonometrische Fkt.
- Exponentialfkt.
- Logarithmusfkt.
- Wurzelfkt.

5. Bestimme rechnerisch die Grenzwerte folgender Funktionen für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$:

   $f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$

   $g(x) = -2x^3 - 6x + 4$

   $h(x) = 0{,}25^x$

   $k(x) = \cos x + 1$

5. **f (x)** $= \frac{x-1}{2x+2} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{2}{x}}$

   also: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

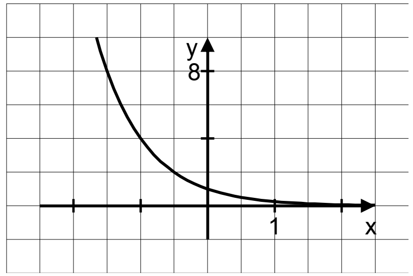
   g (x) $= -2x^3 - 6x + 4 = -2x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$

   also: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

   h (x) $= 0{,}25^x$; Basis a = 0,25 < 1

   => G_h streng momoton fallend und $h(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

   also: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$



k (x) besitzt keinen Grenzwert im Unendlichen, da die Funktionswerte von k stets zwischen 0 und 2 schwanken;