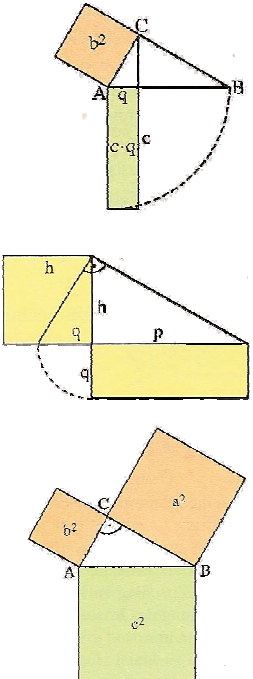
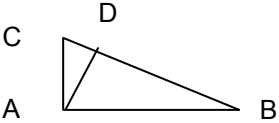
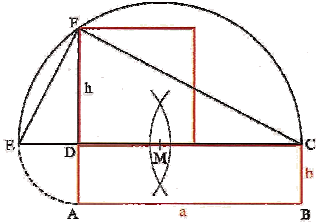
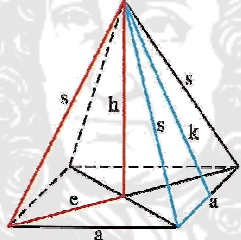
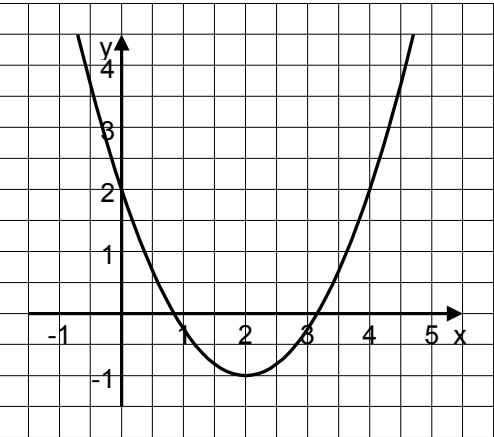




Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele	Lösungen
<p><b><u>I) Reelle Zahlen</u></b></p> <p>Für eine <u>nichtnegative</u> Zahl <math>a</math> heißt diejenige <u>nichtnegative</u> Zahl, deren Quadrat <math>a</math> ergibt, <b>Quadratwurzel</b> von <math>a</math>, kurz <math>\sqrt{a}</math>.</p> <p>Viele Quadratwurzel <math>\sqrt{a}</math> sind keine <b>rationalen</b> Zahlen (mit endlicher oder unendlich periodischer Dezimalbruchdarstellung), sondern <b>irrationale</b> Zahlen mit unendlichen, nicht periodischen Dezimalbruchdarstellungen.</p> <div data-bbox="582 606 840 869" style="text-align: center;"> </div> <p>Die Mengen der rationalen (<math>\mathbb{Q}</math>) und der irrationalen (<math>\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}</math>) Zahlen ergeben zusammen die Menge <math>\mathbb{R}</math> der <b>reellen</b> Zahlen, die durch Intervallschachtelung angenähert werden können.</p> <p><b>Rechenregeln für Quadratwurzeln:</b></p> <p><math>(\sqrt{a})^2 = a</math> für alle <math>a \geq 0</math></p> <p><b>aber:</b> <math>\sqrt{a^2} =  a </math> für alle <math>a \in \mathbb{R}</math></p> <p><math>\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}</math> ; <math>\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}</math> , <math>b \neq 0</math> für alle <math>a, b \geq 0</math></p> <p><b>Binomische Formeln:</b></p> <p>„Plusformel“ <math>(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2</math></p> <p>„Minusformel“ <math>(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2</math></p> <p>„Plus-Minus-Formel“ <math>(a + b)(a - b) = a^2 - b^2</math></p> <p><b>Rationalmachen des Nenners:</b> Nenner enthält ...</p> <p>eine Wurzel                      eine Summe/Differenz von Wurzeln</p> <p>=&gt; erweitere mit                      =&gt; erweitere mit der entsprechenden</p> <p>derselben Wurzel                      Differenz/Summe von Wurzeln (3.bF)</p>	<p>1. Handelt es sich um rationale oder irrationale Zahlen ?</p> <p>a) <math>\sqrt{7}</math></p> <p>b) <math>5,3\overline{6}</math></p> <p>c) <math>\sqrt{3,24}</math></p> <p>d) <math>1,121122111222\dots</math></p> <p>2. Berechne !</p> <p>a) <math>\sqrt{(-6)^2}</math></p> <p>b) <math>\sqrt{3} \cdot \sqrt{72}</math></p> <p>c) <math>\sqrt{48} : \sqrt{3}</math></p> <p>d) <math>\sqrt{9} + \sqrt{16}</math></p> <p>3. Berechne !</p> <p>a) <math>(3x + 5y)^2</math></p> <p>b) <math>(1,5a - \frac{2}{3}b)^2</math></p> <p>c) <math>(\sqrt{2u} + \sqrt{18v^3})(\sqrt{2u} - \sqrt{18v^3})</math></p> <p>4. Mache den Nenner rational !</p> <p>a) <math>\frac{12}{\sqrt{6}}</math></p> <p>b) <math>\frac{5 - \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}</math></p>	<p>1. a) <math>\sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}</math>, da 7 keine Quadratzahl ist</p> <p>b) <math>5,3\overline{6} = 5 \frac{36}{99} = 5 \frac{4}{11} \in \mathbb{Q}</math></p> <p>c) <math>\sqrt{3,24} = 1,8 \in \mathbb{Q}</math></p> <p>d) <math>1,121122111222\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}</math>: nicht period.</p> <p>2. a) <math>\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 =  -6 </math></p> <p>b) <math>\sqrt{3} \cdot \sqrt{72} = \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 36} = 6\sqrt{6}</math></p> <p>c) <math>\sqrt{48} : \sqrt{3} = \sqrt{48:3} = \sqrt{16} = 4</math></p> <p>d) <math>\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7</math></p> <p><b>BEACHT E !!!</b></p> <p><math>\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5</math></p> <p>3. a) <math>(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2</math></p> <p>b) <math>(1,5a - \frac{2}{3}b)^2 = 2,25a^2 - 2ab + \frac{4}{9}b^2</math></p> <p>c) <math>(\sqrt{2u} + \sqrt{18v^3})(\sqrt{2u} - \sqrt{18v^3}) = 2u^2 - 18v^6</math></p> <p>4. a) <math>\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}</math></p> <p>b) <math>\frac{5 - \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}} = \frac{(5 - \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})}{(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})} = \frac{(5 - \sqrt{3})^2}{25 - 3} = \frac{25 - 10\sqrt{3} + 3}{22} = \frac{14 - 5\sqrt{3}}{11}</math></p>

Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele	Lösungen
<p>Für eine <u>nichtnegative</u> Zahl a heißt diejenige <u>nichtnegative</u> Zahl, deren n-te Potenz a ergibt, <b>n-te Wurzel</b> von a, kurz <math>\sqrt[n]{a}</math>, <math>n \geq 2</math>.</p> <p><b>Potenzen mit rationalen Exponenten:</b></p> <p>Für <math>a \in \mathbb{R}^+</math> gilt: <math>a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}</math>; <math>a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}</math> <math>p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}</math></p> <p><b>Potenzgesetze:</b></p> <p>Für <math>r, s \in \mathbb{Q}</math> und <math>a, b \in \mathbb{R}^+</math> gilt:</p> <p>(1) gleiche Basis: <math>a^r \cdot a^s = a^{r+s}</math> <math>a^r : a^s = a^{r-s}</math></p> <p>(2) gleicher Exponent: <math>a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r</math> <math>a^r : b^r = (a:b)^r</math></p> <p>(3) Potenz einer Potenz: <math>(a^r)^s = a^{r \cdot s}</math></p>	<p>5. Berechne !</p> <p>a) <math>16^{\frac{3}{4}}</math></p> <p>b) <math>125^{-\frac{1}{3}}</math></p> <p>c) <math>\sqrt[3]{-8}</math></p> <p>6. Berechne !</p> <p>a) <math>4^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}</math></p> <p>b) <math>\sqrt[5]{2a^{10}} : \sqrt[5]{64a^5}</math></p> <p>c) <math>(\sqrt[3]{2})^6</math></p>	<p>5. a) <math>16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3</math></p> <p>b) <math>125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}</math></p> <p>c) <math>\sqrt[3]{-8}</math> ist nicht definiert !</p> <p><b>aber:</b> <math>x^3 = (-8)</math> hat die Lsg. <math>x = (-2)</math> !!</p> <p>6. a) <math>4^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{9}} \cdot 2^{\frac{2}{9}} = 2^{\frac{4}{9}}</math></p> <p>b) <math>\sqrt[5]{2a^{10}} : \sqrt[5]{64a^5} = \left(\frac{2a^{10}}{64a^5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{a^5}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{a}{2}</math></p> <p>c) <math>(\sqrt[3]{2})^6 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^2 = 4</math></p>
<p><b>II) Satzgruppe des Pythagoras</b></p> <p>Im rechtwinkligen Dreieck (hier: <math>\gamma = 90^\circ</math>) gilt:</p> <p>(1) <b>Kathetensatz:</b> Das Quadrat über einer Kathete ist flächengleich zum Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt: <math>a^2 = c \cdot p</math>; <math>b^2 = c \cdot q</math></p> <p>(2) <b>Höhensatz:</b> Das Quadrat über der Höhe ist flächengleich zum Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten: <math>h^2 = q \cdot p</math></p> <p>(3) <b>Satz des Pythagoras:</b> Die Quadrate über den beiden Katheten sind zusammen flächengleich zum Quadrat über der Hypotenuse: <math>a^2 + b^2 = c^2</math></p> 	<p>1. Im Dreieck ABC gilt: <math>\alpha = 90^\circ</math>; <math>c = 30</math> cm; <math>b = 22,5</math> cm; <math>\sphericalangle ADB = 90^\circ</math>. Berechne die Länge aller in der Figur vorkommenden Strecken mit Hilfe dreier unterschiedlicher Sätze.</p>  <p>2. Verwandle ein Rechteck mit Seitenlänge <math>a = 5,0</math> cm und <math>b = 1,8</math> cm nach dem Höhensatz in ein flächengleiches Quadrat !</p>	<p>1. Mit <math>\overline{AD} = h</math>, <math>\overline{CD} = q</math> und <math>\overline{DB} = p</math> gilt:</p> <p>Pythagoras: <math>a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = 37,5</math> cm</p> <p>Kathetensatz: <math>p = c^2 : a \Rightarrow p = 24</math> cm</p> <p>Hypotenuse: <math>q = a - p \Rightarrow q = 13,5</math> cm</p> <p>Höhensatz: <math>h = \sqrt{p \cdot q} \Rightarrow h = 18</math> cm</p> <p>2.</p>  <p>(1) E liegt auf [CD und k (D; b)</p> <p>(2) M ist Mittelpunkt von [EC]</p> <p>(3) F liegt auf Thaleskreis über [EC] und Lot zu [EC] durch D (Schnittpunkt der Hypotenusenabschnitte ist Höhenfußpunkt !)</p> <p>(4) h ist eine Seite des gesuchten Quadrats</p>

Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele	Lösungen
<p><b>Kehrsatz zum Satz des Pythagoras:</b>                      Wenn in einem Dreieck ABC gilt: <math>a^2 + b^2 = c^2</math>,                      dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.</p> <p><b>Berechnungen an Figuren und Körpern:</b>                      Diagonale im Rechteck: <math>d = \sqrt{a^2 + b^2}</math>                      im Quadrat: <math>d = a\sqrt{2}</math>                      Raumdiagonale im Quader: <math>d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}</math>                      im Würfel: <math>d = a\sqrt{3}</math>                      gleichseitiges <math>\Delta</math>: Höhe: <math>h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}</math>                      Fläche: <math>A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}</math></p>	<p>3. Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit <math>a = 12</math> cm; <math>b = 13</math> cm und <math>c = 5</math> cm !</p> <p>4. Berechne die Seitenlänge eines Quadrats mit Diagonale <math>d = 12</math> cm !</p> <p>5. Berechne für eine quadratische Pyramide mit den Kantenlängen <math>a = 20</math> cm und <math>s = 25</math> cm die Pyramidenhöhe <math>h</math> und die Höhe <math>k</math> einer Seitenfläche !</p> 	<p>3. <math>a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow \Delta</math> ist rechtwinklig mit <math>\beta = 90^\circ</math>  <math>\Rightarrow c \perp a</math> und <math>A = \frac{1}{2}a \cdot c = 30 \text{ cm}^2</math></p> <p>4. <math>d = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}</math></p> <p>5. <math>e = a\sqrt{2} \Rightarrow e = 20\sqrt{2} \text{ cm}</math>  <math>h = \sqrt{s^2 - (0,5e)^2} = \sqrt{625\text{cm}^2 - 200\text{cm}^2} = 5\sqrt{17} \text{ cm}</math>  <math>k = \sqrt{h^2 + (0,5a)^2} = \sqrt{425\text{cm}^2 + 100\text{cm}^2} = 5\sqrt{21} \text{ cm}</math></p>
<p><b>III) Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen</b></p> <p>Funktionen der Form <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>f: x \mapsto ax^2 + bx + c, a \neq 0</math></span>                      heißen <b>quadratische Funktionen</b>.                      Ihre Graphen <math>G_f</math> heißen <b>Parabeln</b>.                      Der Graph der Funktion <math>g(x) = x^2</math> heißt <b>Normalparabel</b>.  <math>G_f</math> ist für <math>a &gt; 0</math> nach oben geöffnet,  <math>a &lt; 0</math> nach unten geöffnet;                      für <math> a  &gt; 1</math> enger als die Normalparabel,  <math> a  &lt; 1</math> weiter als die Normalparabel.                      Der jeweils tiefste (<math>a &gt; 0</math>) bzw. höchste (<math>a &lt; 0</math>) Punkt von <math>G_f</math> heißt <b>Scheitel</b>.  <b>Sonderfälle:</b>  <math>f(x) = x^2 + e \Rightarrow G_f</math> ist eine um <math>e</math> Einheiten in <math>y</math> – Richtung verschobene Normalparabel; <math>S(0   e)</math>  <math>f(x) = (x - d)^2 \Rightarrow G_f</math> ist eine um <math>d</math> Einheiten in <math>x</math> – Richtung verschobene Normalparabel; <math>S(d   0)</math></p>	<p>1. Beschreibe den Graphen der gegebenen Funktion möglichst genau, ohne ihn zu zeichnen !  <math>f(x) = 2x^2 - 12x + 4</math></p> <p>2. Bestimme die Funktionsgleichung zu dem gezeichneten Graphen !</p> 	<p>1. <math>f(x) = 2x^2 - 12x + 4 =</math>  <math>= 2[x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 9 + 2] =</math>  <math>= 2[(x - 3)^2 - 9 + 2] =</math>  <math>= 2(x - 3)^2 - 14</math>  <math>a = 2 \Rightarrow G_f</math> nach oben geöffnet (<math>a &gt; 0</math>) und enger als die Normalparabel (<math> a  &gt; 1</math>)  <math>S(3   -14) \Rightarrow f(x)</math> nimmt ihren kleinsten Wert <math>y = -14</math> für <math>x = 3</math> an  <math>\Rightarrow W_f = [-14; +\infty[</math>  <math>f(x)</math> hat zwei Nullstellen, da <math>S</math> unter der <math>x</math> – Achse liegt und <math>G_f</math> nach oben geöffnet ist.</p> <p>2. <math>S(2   -1) \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 - 1</math>  <math>P(0   2) \in G_f \Rightarrow 2 = a(0 - 2)^2 - 1</math>  <math>\Rightarrow 2 = 4a - 1</math>  <math>\Rightarrow 3 = 4a</math>  <math>\Rightarrow 0,75 = a</math>  <math>\Rightarrow f(x) = 0,75(x - 2)^2 - 1</math></p>

Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele	Lösungen
<p><b>Scheitelpunktform:</b></p> <p><math>f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{quadrat. Ergänzung}} f(x) = a(x-d)^2 + e</math></p> <p><b>Lösungsformel für quadratische Gleichungen:</b></p> <p>quadr. Gleichung: <math>ax^2 + bx + c = 0</math>; <b>Diskriminante</b> <math>D = b^2 - 4ac</math></p> <p><math>D &gt; 0 \Rightarrow</math> 2 Lösungen  <math>D = 0 \Rightarrow</math> 1 Lösung  <math>D &lt; 0 \Rightarrow</math> keine Lsg.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}</math> </div>	<p>3. Berechne die Lösungen folgender Gleichungen:</p> <p>a) <math>4x^2 - 32 = 0</math>  b) <math>5x^2 = 2x</math>  c) <math>3x^2 - 2x = 2x + 4</math></p>	<p>3. a) <math>4x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 8</math>  <math>\Rightarrow x_1 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}</math>; <math>x_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}</math></p> <p>b) <math>5x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(5x - 2) = 0</math>  <math>\Rightarrow x_1 = 0</math>; <math>x_2 = \frac{2}{5}</math></p> <p>c) <math>3x^2 - 4x - 4 = 0</math>  <math>\Rightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 8}{6}</math>  <math>\Rightarrow x_1 = \left(-\frac{2}{3}\right)</math>; <math>x_2 = 2</math></p>
<p><b>IV) Anwendungen quadratischer Funktionen</b></p> <p><b>Bestimmen des Funktionsterms:</b></p> <p>geg.: drei Punkte <math>\in G_f</math>  Lös.: <math>f(x) = ax^2 + bx + c</math> liefert ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen zur Best. von a, b und c  -&gt; eine Gleichung nach einer Variablen auflösen; diese durch Einsetzen in den anderen beiden Gleichungen eliminieren; dann Einsetz- oder Additionsverfahren</p> <p>Sonderfall 1: S und P gegeben <math>\Rightarrow f(x) = a(x-d)^2 + e</math>  Sonderfall 2: zwei NS gegeben <math>\Rightarrow f(x) = a(x-n_1)(x-n_2)</math></p> <p><b>Extremwertprobleme:</b></p> <p>Führt die Suche nach dem Extremwert einer Größe auf eine quadratische Funktion, so liefert die y - Koordinate des Scheitels von <math>G_f</math> diesen Extremwert.</p> <p><b>Schnittpunkte von Funktionsgraphen berechnen:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Funktionsterme gleichsetzen;</li> <li>• jede Lösung dieser Gleichung liefert x - Koordinate eines SP;</li> <li>• y - Koordinate eines SP erhält man durch Einsetzen der x - Koordinate in eine der beiden Funktionsgleichungen;</li> </ul>	<p>1. Bestimme die Gleichung der quadratischen Funktion <math>f(x)</math>, deren Graph <math>G_f</math> durch die Punkte A (1 0), B (2 -1) und C (3 2) verläuft!</p> <p>2. Mit einem Zaun der Länge 800 m soll eine möglichst große rechteckige Fläche eingezäunt werden!</p> <p>3. Berechne die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen  <math>f(x) = -x + 3,5</math> und <math>g(x) = \frac{x+1}{2x-2}</math>!</p>	<p>1. <math>A \in G_f \Rightarrow</math> I) <math>0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c</math>  <math>B \in G_f \Rightarrow</math> II) <math>-1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c</math>  <math>C \in G_f \Rightarrow</math> III) <math>2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 4b + c</math></p> <p>I)' <math>c = -a - b</math> in II): II)' <math>-1 = 3a + b</math>  in III): III)' <math>2 = 8a + 3b</math></p> <p>II)' <math>b = -1 - 3a</math> in III)': <math>2 = 8a - 3 - 9a</math>; <math>a = (-5)</math>  a in II)' <math>b = -1 - 3 \cdot (-5)</math>; <math>b = 14</math>  a, b in I)' <math>c = -(-5) - 14</math>; <math>c = (-9)</math>  <math>f(x) = -5x^2 + 14x - 9</math></p> <p>2. x: Länge; z: Breite  <math>2x + 2z = 800 \Rightarrow z = 400 - x</math>  <math>a(x) = x(400 - x) = -x^2 + 400x =</math>  <math>= -[x^2 - 400x + 40.000 - 40.000] =</math>  <math>= -(x - 200)^2 + 40.000</math> <b>S (200   40.000)</b></p> <p>Die größtmögliche Fläche von 40.000 m<sup>2</sup> erhält man für Länge (x) = Breite (400 - x) = 200 m.</p> <p>3. <math>-x + 3,5 = \frac{x+1}{2x-2} \Rightarrow (-x + 3,5)(2x - 2) = x + 1</math>  <math>\Rightarrow -2x^2 + 8x - 8 = 0 \quad   : (-2)</math>  <math>\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0</math>  <math>\Rightarrow (x - 2)^2 = 0</math>  <math>x = 2</math>; <math>y = f(2) = 1,5</math>; <b>S (2   1,5)</b></p>

**Wissen / Können**

**V) Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten**

Ein ZE, das aus n Teilexperimenten besteht, nennt man mehrstufiges ZE. Seine Ergebnisse schreibt man als **n – Tupel**  $(a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n)$ . Jedes Ergebnis stellt einen **Pfad** im Baumdiagramm vom Start- bis zu einem Endpunkt dar.

**Grundregel:** Die Summe der Wsk.en an den Ästen, die von einem Knoten ausgehen, beträgt immer 1.

**1. Pfadregel:** Die Wsk. eines **Ergebnisses** erhält man durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

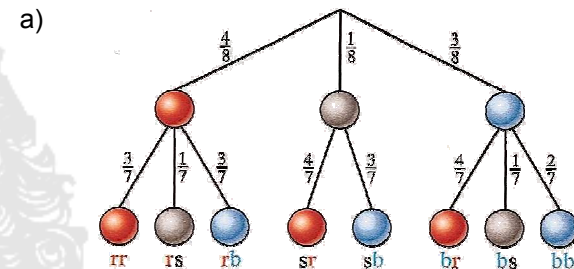
**2. Pfadregel:** Die Wsk. eines **Ereignisses** erhält man durch Addition der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu dem Ereignis gehören.

**Aufgaben und Beispiele**

Eine Urne enthält 4 rote, 1 schwarze und 3 blaue Kugeln. Es werden nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit ...

- a) der einzelnen Ergebnisse !
- b) des Ereignisses B: „Es wird genau eine blaue Kugel gezogen.“

**Lösungen**



$$\frac{12}{56} \quad \frac{4}{56} \quad \frac{12}{56} \quad \frac{4}{56} \quad \frac{3}{56} \quad \frac{12}{56} \quad \frac{3}{56} \quad \frac{6}{56}$$

$$P(\{rr\}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{56} \quad \text{usw.}$$

$$b) \quad P(B) = \frac{12}{56} + \frac{3}{56} + \frac{12}{56} + \frac{3}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

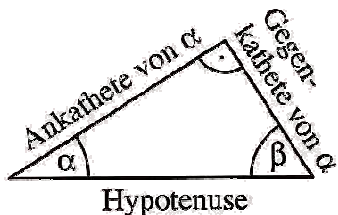
**VI) Trigonometrie**

Im rechtwinkligen Dreieck gilt für jeden **spitzen Winkel**  $\varphi$ :

$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete von } \varphi}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete von } \varphi}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete von } \varphi}{\text{Ankathete von } \varphi}$$



**Besondere Werte von Sinus, Kosinus und Tangens:**

$\varphi$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \varphi$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n. def.

1. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck ABC mit  $\gamma = 90^\circ$  !
  - a)  $a = 47 \text{ m}$  ;  $\beta = 38^\circ$
  - b)  $a = 14,0 \text{ cm}$  ;  $b = 25,8 \text{ cm}$
2. Eine Leiter der Länge 7,5 m lehnt in der Höhe 6,6 m an einer Hauswand. Bestimme den Neigungswinkel  $\alpha$  !

$$1. \quad a) \quad \alpha = 90^\circ - \beta = 52^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin \alpha} \approx 59,6 \text{ m}$$

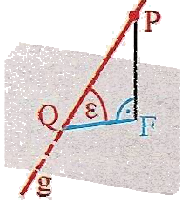
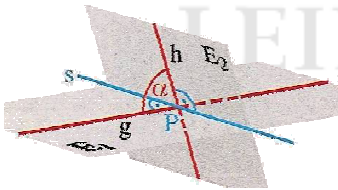
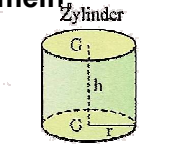
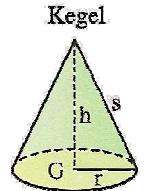
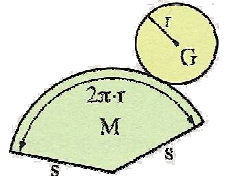
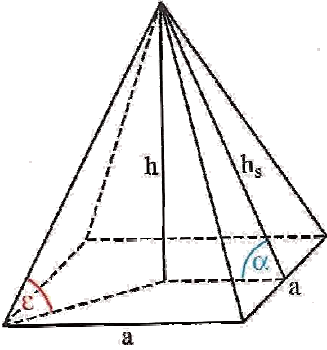
$$b) \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \approx 36,6 \text{ m}$$

$$b) \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 29,4 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \approx 28,5^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 61,5^\circ$$

$$2. \quad \sin \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{h}{l}\right) \approx 61,6^\circ$$

Wissen / Können	Aufgaben und Beispiele	Lösungen
<p><b>Beziehungen zw. Sinus, Kosinus, Tangens: <math>0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ</math></b></p> <p>(1) <math>\sin \varphi = \cos (90^\circ - \varphi)</math> ; <math>\cos \varphi = \sin (90^\circ - \varphi)</math></p> <p>(2) <math>\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1</math></p> <p>(3) <math>\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}</math> ; <math>\varphi \neq 90^\circ</math></p>	<p>3. Berechne aus <math>\cos \alpha = \frac{1}{3}</math> folgende Werte:</p> <p>a) <math>\sin \alpha</math> , <math>\tan \alpha</math></p> <p>b) <math>\sin (90^\circ - \alpha)</math> , <math>\cos (90^\circ - \alpha)</math> , <math>\tan (90^\circ - \alpha)</math></p>	<p>3. a) <math>\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}</math></p> <p><math>\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{2}</math></p> <p>b) <math>\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha</math> ; <math>\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha</math> ;</p> <p><math>\tan (90^\circ - \alpha) = \frac{\sin (90^\circ - \alpha)}{\cos (90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{2}</math></p>
<p><b>VII) Raumgeometrie</b></p> <p><b>Neigungswinkel <math>\varepsilon</math> einer Geraden <math>g</math> gegen eine Ebene <math>E</math>:</b>  <math>\times</math> FQP mit Lotfußpunkt F im rechtwinkligen Stützdreieck QFP</p>  <p><b>Neigungswinkel <math>\alpha</math> zwischen zwei Ebenen <math>E_1</math> und <math>E_2</math>:</b>              spitzer <math>\times</math> zwischen zwei Geraden <math>g</math> und <math>h</math>, die im selben Punkt P auf der Schnittger. <math>s</math> senkrecht stehen</p>  <p><b>Volumen- und Oberflächenformeln:</b></p> <p><u>Prisma:</u> <math>V = G \cdot h</math>  <math>O = 2G + M</math></p> <p><u>Zylinder:</u> <math>V = r^2 \pi \cdot h</math>  <math>M = 2r\pi \cdot h</math>  <math>O = 2r^2 \pi + 2r\pi \cdot h</math></p>  <p><u>Pyramide:</u> <math>V = 1/3 G \cdot h</math>  <math>O = G + M</math></p> <p><u>Kegel:</u> <math>V = 1/3 r^2 \pi \cdot h</math>  <math>M = r\pi \cdot s</math>  <math>O = r^2 \pi + r\pi \cdot s</math></p>  	<p>1. Berechne Volumen und Oberfläche eines Prismas mit Höhe <math>h = 12,5</math> cm, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge <math>a = 6</math> cm ist !</p> <p>2. a) Berechne Volumen und Oberfläche einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche (<math>a = 4,0</math> cm) und Höhe <math>h = 3,0</math> cm !</p> <p>b) Berechne den Neigungswinkel der Seitenkanten und Seitenflächen gegen die Grundfläche !</p>  <p>3. Berechne Volumen, Mantel- und Oberfläche eines Kegels mit <math>d = 0,32</math> m und <math>h = 40,5</math> cm !</p>	<p>1. Grundfläche: <math>G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{3}</math>  <math>G = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2</math></p> <p><math>V = Gh = 112,5 \sqrt{3} \text{ cm}^3</math></p> <p><math>O = 2G + M = 2G + 3 \cdot ah = 18 \sqrt{3} \text{ cm}^2 + 225 \text{ cm}^2</math></p> <p>2. a) <math>V = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} a^2 h = 16 \text{ cm}^3</math></p> <p><math>O = G + 4 \cdot 0,5ah_s = a^2 + 2a \cdot \sqrt{h^2 + (\frac{1}{2}a)^2} =</math>  <math>= 16 \text{ cm}^2 + 8\sqrt{13} \text{ cm}^2</math></p> <p>b) Grundflächendiagonale <math>d</math>  <math>d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}</math></p> <p><math>\tan \varepsilon = \frac{h}{0,5d} = \frac{2h}{d} \Rightarrow \varepsilon = \tan^{-1} \left( \frac{2h}{d} \right) \approx 46,7^\circ</math></p> <p><math>\tan \alpha = \frac{h}{0,5a} = \frac{2h}{a} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{2h}{a} \right) \approx 56,3^\circ</math></p> <p>3. <math>d = 2r \Rightarrow r = 0,5d = 0,16 \text{ m} = 1,6 \text{ dm}</math></p> <p><math>V = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} r^2 \pi h = 10,9 \text{ dm}^3</math></p> <p><math>M = r \pi s = r \pi \sqrt{h^2 + r^2} \approx 21,9 \text{ dm}^2</math></p> <p><math>O = r^2 \pi + r \pi s = r^2 \pi + r \pi \sqrt{h^2 + r^2} \approx 29,9 \text{ dm}^2</math></p>